

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (3 điểm)

Cho ba số a, b, c thỏa các điều kiện: $a - b = 7, b - c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$.

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3$

Bài 3. (3 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y - 1) + y(x + 1) = 6 \\ (x - 1)(y + 1) = 1 \end{cases}$$

Bài 4. (4 điểm)

1. Cho 2 số thực dương x, y thỏa điều kiện $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2$

2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x + y)(x + 2y) = x + 5$.

Bài 5. (5 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH . Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K . Chứng minh rằng AK vuông góc với HK .

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AH, AD lần lượt là đường cao, đường phân giác trong của tam giác ABC ($H, D \in BC$). Tia AD cắt (O) tại E , tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K . Chứng minh rằng AK là đường kính của (O) .

Bài 6. (2 điểm)

Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (3 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa điều kiện $a - b = 7, b - c = 3$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$$

Từ giả thiết ta có $a - c = 10$ và $a + c - 2b = 4$

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc} = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2(a - c)(a + c - 2b)} = \frac{79}{40}$$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình : $(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3$

$$(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3 \Leftrightarrow (2x - 1)(\sqrt{x + 3} - x) = -2x^2 + x + x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(\sqrt{x + 3} - x) = (\sqrt{x + 3} + x)(\sqrt{x + 3} - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 3} - x = 0 \\ 2x - 1 = \sqrt{x + 3} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 3} = x \\ \sqrt{x + 3} = x - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x + 3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x + 3} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x + 3 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

Bài 3. (3 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y - 1) + y(x + 1) = 6 \\ (x - 1)(y + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y - 1) + y(x + 1) = 6 \\ (x - 1)(y + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - x + y = 6 \\ xy + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = 8 \\ xy + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{8}{3} \\ x - y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y - \frac{2}{3}) = \frac{8}{3} \\ x = y - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \vee y = -\frac{4}{3} \\ x = y - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \vee x = -2 \\ y = 2 \vee y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Bài 4. (4 điểm)

1. Cho 2 số thực dương x, y thỏa điều kiện $\frac{x}{1 + x} + \frac{2y}{1 + y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2$

$$\frac{x}{1 + x} + \frac{2y}{1 + y} = 1 \Rightarrow \frac{x}{1 + x} + \frac{y}{1 + y} = \frac{1}{1 + y} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1 + x)(1 + y)}}$$

$$\Rightarrow 4xy \leq \frac{1+x}{1+y}$$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1 \Rightarrow \frac{2y}{1+y} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow 2y = \frac{1+y}{1+x}$$

$$\Rightarrow 8xy^2 \leq 1 \Rightarrow xy^2 \leq \frac{1}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$

2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x+y)(x+2y) = x+5$.

$$(x+y)(x+2y) = x+5 \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 = x+5$$

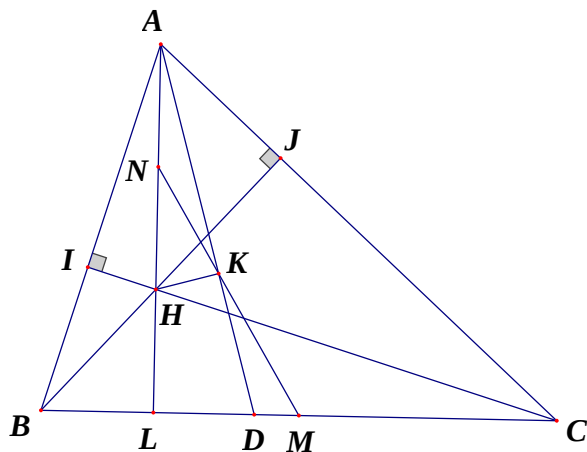
$$\Leftrightarrow x^2 + x(3y-1) + 2y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+2y-2)(x+y+1) = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2=1 \\ x+y+1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2y-2=-1 \\ x+y+1=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2y-2=3 \\ x+y+1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2y-2=-3 \\ x+y+1=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-9 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn phương trình ban đầu)}$$

Bài 5. (5 điểm)

1/ Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH . Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K . Chứng minh rằng AK vuông góc với HK .



Gọi AL, BJ, CI là các đường cao tam giác ABC .

Tứ giác $AIHJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AH tâm N .

Tứ giác $BIJC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC tâm M .

Suy ra MN là trung trực của IJ .

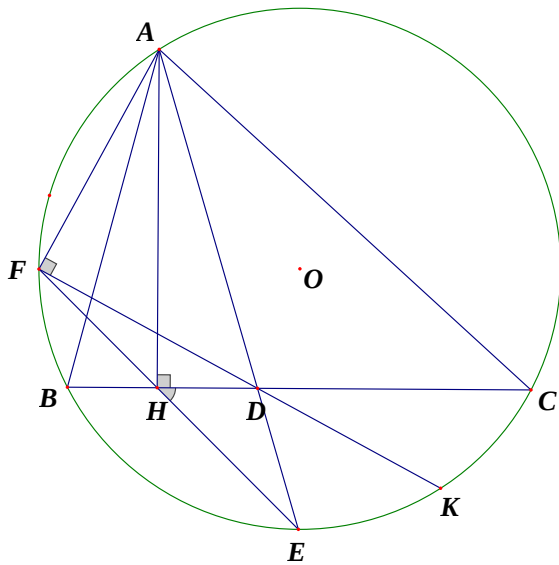
Gọi K' là giao điểm của AD và đường tròn (N)

$\Rightarrow K'$ là điểm chính giữa cung IJ

$\Rightarrow K'I = K'J \Rightarrow K' \in MN \Rightarrow K' \equiv K$

$\Rightarrow AKH = 90^\circ$ hay $AK \perp HK$

2/ Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AH, AD lần lượt là đường cao, đường phân giác trong của tam giác ABC ($H, D \in BC$). Tia AD cắt (O) tại E , tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K . Chứng minh rằng AK là đường kính của (O) .



Ta có AD là phân giác góc $A \Rightarrow E$ là điểm chính giữa

cung $BC \Rightarrow EB = EC$

$$FAE = \frac{1}{2} FE = \frac{1}{2} (FB + BE) = \frac{1}{2} (FB + EC) = EHC$$

$\Rightarrow AFHD$ nội tiếp

$\Rightarrow AFD = AHD = 90^\circ$

$\Rightarrow AFK = 90^\circ$

$\Rightarrow AK$ là đường kính của (O)

Bài 6. (2 điểm)

Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Nam chơi bóng bàn vào ngày thứ Hai và chơi bóng đá vào ngày thứ Tư. Do còn lại bốn ngày liên tiếp không kể thứ Hai và thứ Tư nên Nam phải chạy vào ngày thứ Ba. Do vậy anh ấy chạy tiếp vào các ngày thứ Năm và thứ Bảy hoặc thứ Năm và Chủ Nhật hoặc thứ Sáu và Chủ Nhật.

Nam không thể chạy vào ngày thứ Năm và thứ Bảy hoặc thứ Năm và Chủ Nhật vì khi đó anh ta chơi cầu lông ngay sau ngày anh ta chạy hoặc bơi.

Vậy Nam chạy vào ngày thứ Sáu và Chủ Nhật nên anh ta chơi cầu lông vào ngày thứ Năm và bơi vào ngày thứ Bảy.

Hai	Ba	Tư	Năm	Sáu	Bảy	Chủ Nhật
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá				
			Chạy		Chạy	
			Chạy			Chạy
			Cầu lông	Chạy	Bơi	Chạy